

## Сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін шешу әдістері

Есептеу математикасының негізгі мәселелерінің бірі – нақты коэффициентті сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін шешу мәселесі. Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесінің жуық шешімін табу үшін тура және итерациялық әдістер қолданылады. Сызықтық алгебраның математикалық аппараты вектор мен матрица нормалары, шарттылық саны ұғымдарына негізделген. Белгісіздерді жоюдың классикалық әдістері қарастырылады, симметриялы нақты матрицасы бар есептерді шешу ерекшеліктері атап өтіледі.

### Сызықты алгебралық теңдеулер жүйесі есебінің қойылымы

Сызықты алгебралық теңдеулер жүйесі келесі түрде болады

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \dots + A_{1n}x_n = b_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \dots + A_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ A_{n1}x_1 + A_{n2}x_2 + \dots + A_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

мұндағы  $a_{ij}$  коэффициенттері мен  $b_j$  тұрақтылары белгілі, ал  $x_i$  белгісіздерді көрсетеді. Матрицалық түрде теңдеулер жүйесі былай жазылады:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (2)$$

немесе  $A \cdot x = b$  (3)

$A$  – коэффициент матрицасы,  $b$  – бос мүше вектор бағаны,  $x$  – белгісіз вектор бағаны.

**Есептің қойылымы:** (3)-ті тепе-теңдікке айналдыратын  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ -вектор бағанын табу керек.

### Шешімнің жалғыздығы

$n$  белгісізді  $n$  сызықтық теңдеулер жүйесінің жалғыз шешімі бар, егер коэффициент матрицасының анықтаушы айрықша емес болса; яғни  $|A| \neq 0$ . Ешбір жол (немесе баған) басқа жолдардың (немесе бағандардың) сызықтық комбинациясы емес деген мағынада, айрықша емес матрицаның жолдары мен бағандары сызықтық тәуелсіз.

### Нашар шарттылық

Ашық сұрақ мынада: егер коэффициент матрицасының анықтаушы айрықша болғанда не болады (яғни,  $|A| = 0$  немесе өте аз болса). Коэффициент матрицасының анықтаушы «кіші» екенін анықтау үшін анықтаушыты өлшеуге болатын аппарат қажет. Бұл аппарат матрицаның нормасы деп аталады және  $\|A\|$  арқылы белгіленеді. Сонда анықтаушы аз деп айта аламыз, егер  $|A| \ll \|A\|$

Қолданыстағы әдебиеттерде матрицаның және векторлардың бірнеше нормалары анықталған, мысалы, Евклид нормасы

|   |   |
|---|---|
| Векторлар үшін                          | Матрицалар үшін                                       |
| $\ x\ _E = \sqrt{\sum_{j=1}^n  x_j ^2}$ | $\ A\ _E = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}^2}$ |

(4)

және қатар-қосынды норманы шексіздік нормасы деп те атайды

|   |   |
|---|---|
| Векторлар үшін                                | Матрицалар үшін   |
| $\ x\ _\infty = \max_{1 \leq j \leq n}  x_j $ | $\ A\ _\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n  A_{ij} $ |

(5)

Шарттылықтың формальды өлшемі ретінде келесі түрде анықталған матрицаның шарттылық саны болып табылады

$$\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

Егер шарттылық сан бірлікке жақын болса, матрица жақсы шартталған. Шарттылық саны айрықша матрица үшін нашар шартталған дәрежесіне қарай өсе отырып, шексіздікке кетіп қалады.

Матрицалық норманы таңдауға байланысты шарттылық саны бірдей болмайтынын ескеріңіз. Өкінішке орай, үлкен матрицалар үшін шарттылық санын есептеу көп шығынға ұшыратады.

Нашар шартталған теңдеулердің сандық шешімдеріне сенуге болмайды. Себебі шешу үрдісінде жасалатын дөңгелектеу қателері коэффициент матрицасына аздаған өзгерістер енгізуге тура келеді. Бұл өз кезегінде шешімге үлкен қателер енгізеді, олардың мөлшері нашар шартталған деңгейіне байланысты.

Күдікті жағдайларда коэффициент матрицасының анықтаушысын есептеу керек, ол нашар шартталған дәрежесін бағалауға болатындай. Мұны шешу кезінде немесе одан кейін аз ғана есептеу күшімен жасауға болады.

### Сызықтық жүйелер

Сызықтық, алгебралық теңдеулер сандық талдаудың барлық салаларында кездеседі. Бірақ олардың инженериядағы ең көрнекті қолданылуы сызықтық жүйелерді талдау болып табылады (есептің жауабы бастапқы мәліметтерге пропорционал болатын кез келген жүйе сызықтық болып саналады).

Егер жүйе дискретті болса, онда оны талдау тікелей сызықтық алгебралық теңдеулерге әкеледі. Статикалық анықталатын ферма жағдайында, мысалы, теңдеулер қосылыстардың тепе-теңдік шарттарын жазғанда пайда болады.  $x_1, x_2, \dots, x_n$  белгісіздер мүшелердегі күштер мен тірек реакцияларын көрсетеді, ал  $b_1, b_2, \dots, b_n$  тұрақтылары берілген сыртқы жүктемелер болып табылады.

Үздіксіз жүйелердің әрекеті алгебралық теңдеулермен емес, дифференциалдық теңдеулермен сипатталады. Алайда, сандық талдау тек дискретті айнымалылармен айналысатындықтан, алдымен дифференциалдық теңдеуді жуықтап алгебралық теңдеулер жүйесі келтіріп алу қажет. Осыдан талдаудың белгілі ақырлы айырымдық, ақырлы элементтер және шекаралық элемент әдістері жұмыс істейді. Олар «дискретизацияға» қол жеткізу үшін әртүрлі жуықтауларды пайдаланады, бірақ әр жағдайда түпкілікті тапсырма бірдей: сызықтық, алгебралық теңдеулер жүйесін (көбінесе өте үлкен жүйе) шешу.

Қорытындылай келе, сызықтық жүйелерді модельдеу әрқашан  $Ax = b$  түріндегі теңдеулерге алып келеді, мұнда  $b$  – бастапқы мәліметтер және  $x$  – жүйенің жауабын білдіреді. Жүйенің сипаттамаларын көрсететін коэффициент матрицасы  $A$  бастапқы мәліметтерге тәуелсіз. Басқаша айтқанда, егер бастапқы мәліметтер өзгертілсе, теңдеулерді басқа  $b$ -мен, бірақ сол  $A$  көмегімен қайтадан шешу керек. Сондықтан, минималды есептеу күшімен тұрақты векторлардың кез келген санын өңдей алатын теңдеулерді шешу алгоритмі болғаны жөн.

### Шешу әдістері

Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін шешу әдістерінің екі класы бар: Тура және итерациялық әдістер. Тура әдістердің жалпы сипаттамасы олар бастапқы теңдеулерді оңайырақ шешілетін эквивалентті теңдеулерге (шешімі бірдей теңдеулер) түрлендіру болып табылады. Түрлендіру келесі үш амалды қолдану арқылы жүзеге асырылады. Бұл элементар деп аталатын амалдар шешімді өзгертпейді, бірақ олар жақшада көрсетілген коэффициент матрицасының анықтаушына әсер етуі мүмкін.

1. Екі теңдеуді алмастыру ( $|A|$  белгісін өзгертеді)
2. Теңдеуді нөлге тең емес тұрақтыға көбейту ( $|A|$ -ны сол тұрақтыға көбейтеді)
3. Теңдеуді нөлге тең емес тұрақтыға көбейту, содан кейін оны басқа теңдеуден алу ( $|A|$  өзгеріссіз қалдырады).

Итерациялық әдістер  $x$  шешімін болжаудан басталады, содан кейін белгілі бір жинақтылық шартына жеткенше шешімді қайта-қайта нақтылайды. Итерациялық әдістер талап етілетін итерациялар санының көп болуына байланысты олардың тура әдістеріне қарағанда әдетте тиімділігі төмен. Дегенмен, егер коэффициент матрицасы өте үлкен және аз санды болса (коэффициенттердің көпшілігі нөлге тең) болса, олардың айтарлықтай есептеу артықшылықтары бар.

### Тура әдістерге шолу

1-кестеде үш танымал тура әдістер келтірілген, олардың әрқайсысы өзінің оңай шешілетін теңдеулердің соңғы түрін шығару үшін қарапайым амалдарды қолданады.

| Әдіс         | Бастапқы түрі | Қорытынды түрі |
|--------------|---------------|----------------|
| Гаусс        | $Ax = b$      | $Ux = c$       |
| LU жіктеу    | $Ax = b$      | $LUx = b$      |
| Гаусс-Жордан | $Ax = b$      | $Ix = c$       |

1-кесте. Үш танымал тура әдістер

1-кестеде  $U$  жоғарғы үшбұрышты матрицаны,  $L$  төменгі үшбұрышты матрицаны, және  $I$  бірлік матрицасын белгілейді. Квадрат матрица үшбұрышты деп аталады, егер оның басты диагональдың бір жағында тек нөлдік элементтер болса. Ендеше  $3 \times 3$  жоғарғы үшбұрышты матрицаның түрі

$$\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$$

және  $3 \times 3$  төменгі үшбұрышты матрицаның түрі

$$\begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix}$$

Үшбұрышты матрицалар сызықтық алгебрада маңызды рөл атқарады, өйткені олар көптеген есептеулерді жеңілдетеді.

Үшбұрышты түрге келтіру процедурасы тура(алға) жүріс деген атаумен белгілі. Гаусстың біртіндеп жоюда  $Ux = c$  қорытынды түріне келгеннен кейін, соңғы теңдеуден бастап, кері жүріс арқылы есептің шешімін оңай табады.

LU жіктеуімен байланысты  $LUx = b$  теңдеулерін, егер оларды екі эквивалентті теңдеулер жинағымен ауыстырсақ, тез шешуге болады:  $Ly = b$  және  $Ux = y$ . Енді  $Ly = b$  үшін тура жүріс арқылы шешіледі, содан кейін кері жүріс арқылы  $Ux = y$  шешіледі.

Гаусс-Жорданның біртіндеп жою арқылы алынған  $Ix = c$  теңдеулері  $x = c$  тең ( $Ix = x$  бірлік матрица екенін еске түсіріңіз), сондықтан  $c$  шешім болып табылады.